

改进型中心引力优化 CFO 算法研究

孟 超¹, 孙知信^{1,2}

(1. 南京航空航天大学计算机科学与技术学院, 江苏南京 210016;

2. 南京邮电大学宽带无线通信与传感网技术教育部重点实验室, 江苏南京 210003)

摘 要: 中心引力优化算法(Central Force Optimization)是一种新型的基于天体力学的多维搜索优化算法. 这是一种确定性的优化算法, 该算法利用一组“质子”在引力作用下的运动, 搜索决策空间最优值. 但该算法仍然有局部收敛的特点. 本文对该算法中质子运动方程做了分析研究, 利用天体力学中的摄动理论对算法进行了改进, 给出了改进后的新的 CFO 算法的迭代公式, 并且对新的公式进行了分析. 最后实验结果表明针对 CFO 算法的摄动改进可以使得搜索质子跳过 CFO 空间中的局部解, 使得算法收敛精度和速度都有了不同程度的提高.

关键词: 质子; 中心引力优化; 确定性算法; 摄动理论

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2014)01-0089-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.014

Research on Improved Central Force Optimization Algorithm

MENG Chao¹, SUN Zhi-xin^{1,2}

(1. College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;

2. Key Laboratory of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Ministry of Education, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

Abstract: Central Force Optimization (CFO) is a new deterministic multi-dimensional search metaheuristic based on the metaphor of gravitational kinematics. CFO is a deterministic algorithm that explores a decision space by “flying” a group of probes whose trajectories are governed by Newton’s laws. But it may be local trapping. This paper makes a thorough research on the probes move governed by the equations of gravitational motion through the Celestial Mechanics, establishing the relationship between CFO algorithm and Celestial Mechanics, using the perturbation theory of Celestial Mechanics to improve CFO algorithms and deducing the new iterative equation. Finally, simulation results show that CFO based on perturbation theory avoids local trap. The enhanced algorithm has great advantage of convergence property and robustness compared to stochastic algorithms.

Key words: probe; central force optimization; deterministic algorithm; perturbation theory

1 引言

中心引力优化算法* (Central Force Optimization) 是一种确定性的启发式算法, 该算法可以实行多维全局的优化搜索^[1]. 算法来源于万有引力动力学.

目前几乎所有的启发式的优化算法都是基于某种自然界的隐喻, 比如近几年刚出现的 GSO 算法^[2], 该算法是一种全新的最优化算法, 很好地运用了动物种群搜寻资源行为的特性——一个或若干个带领群体的首领 (Producer), 跟随首领并分享搜寻成果的大多数群体成

员 (scrounger), 以及部分脱离群体的“掉队者” (ranger), 此算法对最优化问题中的各变量进行描述, 并对寻优方式进行模拟. 其他还有一些常见的优化算法比如: 粒子群优化算法^[3,4]和蚁群优化算法^[5-7]. 以上这些算法都会有一些随机的特征. 随机优化算法的每一次的运行都会得到不同的结果. CFO 算法是一种确定性的优化算法, 因为万有引力规则和物理的现象都是确定性的. 确定性的算法有着许多的优点, 比如该算法可以采用确定性的数据. 算法每一次执行, 同样的起始数据可以得到同样的结果, 所以该算法执行期间可以使用反馈的方

收稿日期: 2012-11-22; 修回日期: 2013-04-21; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60973140, No. 61170276); 江苏省高校自然科学研究重大项目 (No. 12KJA520003); 江苏省自然科学基金 (No. BK2009425)

* 此算法最近几年才出现, 还没有相关的中文论文, 笔者根据算法来源于天体的万有引力, 所以暂译为“中心引力算法”.

法实时调整参数. CFO 算法通过一组质子**在决策空间搜索最优值. 质子类似于粒子群算法的粒子和蚁群算法的蚂蚁, 但搜索方式有相当大的不同.

CFO 算法是由 R A Formato 在 2007 年最先提出的. 目前的研究处于初级阶段. 文献[1]最先提出了基本 CFO 算法, 指出在三维空间中在大质量天体的轨道周围聚集小的天体, 由此作者提出了 CFO 算法, 并将该算法应用于一些电磁学优化装载问题, 取得了一些成果. 文献[8]将算法应用到训练人工神经网络对数据分类, 并且与 PSO 训练进行比较, 文中采用了三种模型, 采用了 Iris 数据作为训练和测试集, 最后结论 CFO 算法是一种新的启发式算法, 性能优越. 文献[9]将该算法应用于管道的泄漏和摩擦因子校准的问题上, 结果说明该算法有效. 文献[10]将算法与 Nelder-Mead 算法相结合提出了混合型算法, 取得好的效果. 该算法在其他研究领域也有了一定的应用^[11,12]. 文献[13]提出了改进的方案, 利用算法对初始参数敏感的特点, 在初始利用质子不同的分布, 多次的运行, 得到最好的结果. 但是改进后, 并没有避免局部收敛性. 目前还没有避免局部收敛的改进算法.

与其他的算法不同, CFO 在搜索过程中, 当质子“陷入”局部最优时, 由于引力作用, 可将其从局部最优中“拉出”, 继续搜索. 在搜索中, 这个过程会不断反复, 收敛速度和精度受到影响. 所以对算法进行改进, 避免质子陷入局部最优“陷阱”, 显得很重要.

本文利用天体力学的摄动理论对 CFO 算法局部收敛性能进行了改进, 给出了改进后的新的迭代模型, 并对新的模型进行了分析, 指出了质子在摄动力存在下的运动规律, 并说明正是由于摄动力的存在, 产生了摄动增量使得质子跳过局部最优“陷阱”, 继续在全局范围搜索. 实验结果说明了质子跳过局部最优“陷阱”, 可以有效的提高算法收敛的速度和精度.

2 基本 CFO 优化算法

CFO 算法^[1]定位目标函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{N_d})$ 全局最大值在空间区域 $\Omega: x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, 1 \leq i \leq N_d, x_i$ 是 N_d 维空间的变量, i 是坐标数, N_d 是决策空间的维数. 算法有两个运动方程式(1)和(2).

$$a_{j-1}^p = G \sum_{k=1, k \neq p}^{N_p} U(M_{j-1}^k - M_{j-1}^p) \cdot (M_{j-1}^k - M_{j-1}^p)^\alpha \times \frac{(\mathbf{R}_{j-1}^k - \mathbf{R}_{j-1}^p)}{\|\mathbf{R}_{j-1}^k - \mathbf{R}_{j-1}^p\|^\beta} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_j^p = \mathbf{R}_{j-1}^p + a_{j-1}^p, j \geq 1 \quad (2)$$

a_{j-1}^p 是 p 在第 $j-1$ 步的加速度, $\mathbf{R}_j^p = \sum_{k=1}^{N_d} x_k^{p,j} \mathbf{e}_k$ 是

质子在第 j 步的位置向量. $x_k^{p,j}$ 是它在第 k 维的坐标, \mathbf{e}_k 是沿 x_k 轴的单位向量. N_p 和 N_t 代表总质子总数和总共的迭代步数.

$M_{j-1}^p = f(x_1^{p,j-1}, x_2^{p,j-1}, \dots, x_{N_d}^{p,j-1})$ 是 p 在迭代步 $j-1$ 时的目标函数值.

U 是一个单步函数, $U(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, α 和 β 分别是 1 和 3, 为了计算方便 β 取值 1.

“质量”是一个根据质子位置变化的自定义的值. 具体算法参见文献[1].

3 CFO 算法的摄动改进

CFO 算法的核心是对于加速度 \mathbf{a} 的求解. 对于加速度的进一步的分析, 详见参考文献[1]. 假设 CFO 空间是由 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{N_d})$ 这组两两正交的单位向量所张成一个 N_d 维空间. $(x_1, x_2, \dots, x_{N_d})$ 为质子 P_i 在 CFO 搜索空间中的坐标, 在 CFO 算法中, 质子组中任意一个质子 P_i 受到了目标函数值大的其余质子的引力的合力作用, 此合力称为中心体的引力. 另外, 在假设 CFO 决定空间中还存在另一附加质子 q 质量为 m_q , q 对于 CFO 空间中质子组存在万有引力, 这样与摄动理论保持一致.

设质子除了受到中心体的引力外还受到附加质子 q 的引力 F , 称为质子受到了摄动力 F 的作用. 由于有摄动力的存在^[14,15], 使得任一质子在 CFO 空间中存在着向着摄动力方向的加速度, 则相应的运动方程都有如下形式 $x = x_0 + \delta x$, 其中 x_0 是质子在无摄动力存在下坐标, δx 是摄动增量, 此摄动称为坐标位置摄动. 于是质子在第 j 步的位置向量为:

$$\mathbf{R}_j^p = \sum_{k=1}^{N_d} (x_k^{p,j} + \delta x) \mathbf{e}_k, \text{ 其中参数定义如式(1).}$$

由于有摄动力产生了摄动增量 δx , 当质子遇到局部最优的“陷阱”时, 此增量可以将使得质子绕过局部最优, 继续在全局范围搜索. 下面将推导得出摄动力存在下的质子加速度公式.

在 CFO 的 N_d 维空间中质子 q 对于 p_i 的距离和质子组中任两个质子的距离是式(3)和(4).

$$r_{qi} = \left(\sum_{k=1}^{N_d} (x_k^q - x_k^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$r_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{N_d} (x_k^i - x_k^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中 x_k^i 表示质子 i 的第 k 维坐标. x_k^q 表示质子 q 的第 k 维坐标. 质子 q 受到质子组的引力式(5).

** 在文献[1]都是采用了 probe, 即探测器, 笔者根据天体力学的一些理论暂译为质子, 即有质量的粒子.

$$F_k^q = G \frac{x_k^i - x_k^q}{r_{0i}^3} m_q m_i \quad (5)$$

其中 F_k^q 表示质子 q 的第 k 维的引力分量。

式(5)是质子组中任意一个质子 i 对附加质子 q 的万有引力的第 k 维分量,则根据牛顿第二运动定律整个质子组中所有质子对附加质子 q 的引力和,所产生的附加质子 q 的加速度为式(6):

$$m_q \ddot{x}_k^q = G \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_q m_i (x_k^q - x_k^i)}{r_{0i}^3} \quad (6)$$

其中 \ddot{x}_k^q 表示质子 q 第 k 维的坐标分量对于时间 t 的二阶导数,也就是加速度第 k 维的分量.式(11)右边表示的质子组中所有质子对附加质子引力的合力,所以用了求和的符号.式(11)左边是牛顿第二运动定律.

同理对于质子组中任意一个 P_i 受到其余质子的引力和 q 质子的共同作用,其运动方程式(7).

$$m_i \ddot{x}_k^i = G \frac{m_q m_i (x_k^q - x_k^i)}{r_{qi}^3} + G \sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_i m_j (x_k^i - x_k^j)}{r_{ij}^3}, (j \neq i) \quad (7)$$

现在作坐标平移,将坐标原点平移到 q 点,令在新的坐标系中坐标分量用 X 表示,则质子组中第 i 个质子 k 维在新的坐标系中存在如下关系:

$$x_k^i = x_k^q + X_k^i \quad (8)$$

其中 X_k^i 是第 i 个质子在新的坐标系下的 k 维坐标.用式(6)两边消去 m_q ,式(7)两边消去 m_i ,代入式(8)得到:

$$\ddot{X}_k^i = \ddot{x}_k^i - \ddot{x}_k^q = -G(m_q + m_i) \frac{x_k^i}{r_{qi}^3} + G \sum_{j=1, j \neq i}^{N_p} m_j \left(\frac{x_k^i - x_k^j}{r_{ij}^3} - \frac{x_k^j}{r_{qj}^3} \right) \quad (9)$$

其中 r_{qi} 和 r_{qj} 是质子 i 和 j 到坐标原点的距离. m 的定义与 CFO 算法的定义保持一致.即 $MASS_{CFO} = U(M_{j-1}^k - M_{j-1}^p) \cdot (M_{j-1}^k - M_{j-1}^p)^\alpha$, $\alpha = 1$, 则 $m_i = 0$, $m_j = MASS_{CFO}$.

根据牛顿第二运动定律,式(6)描述了附加质子的运动规律,式(7)描述了质子组中任意质子的运动规律.当坐标发生平移以后,新旧坐标符合式(8),将其两边求二阶导数,并将式(6)和(7)两边消去质量,再分别代入式(8),并令 m_q 是单位质量的质子为 1,得到式(9).为了与式(1)的表示方法统一,将式(9)的 i 和 j 换成 k 和 p 得质子摄动力存在下,在 CFO 算法空间迭代式(10)

$$a_{j-1}^p = -G \frac{R_{j-1}^p}{\|R_{j-1}^p\|^\beta} + G \sum_{k=1, k \neq p}^{N_d} U(M_{j-1}^k - M_{j-1}^p) \cdot (M_{j-1}^k - M_{j-1}^p)^\alpha$$

$$\cdot \left(\frac{R_{j-1}^k - R_{j-1}^p}{\|R_{j-1}^k - R_{j-1}^p\|^\beta} - \frac{R_{j-1}^k}{\|R_{j-1}^k\|^\beta} \right) \quad (10)$$

其中 $\beta = 3$.

利用式(10)可以将基本 CFO 迭代算法修改,修改后的算法如下:

1. 初始时,质子还未开始运动是静止状态,设置 $a_{j-1}^p = 0$, 质子初始位置向量是随机的.
2. 计算初始时的质子对应位置的目标函数值.
3. For $j = 0$ to N_t
 - For $p = 1$ to N_p
 - 如果有质子超出上界或是下界,则进行质子位置的调整^[1];
 - For $p = 1$ to N_p
 - 式(1)计算加速度,计算质子的位置 $R_j^p = R_{j-1}^p + a_{j-1}^p$
 - 用式(10)重新计算加速度,计算质子新位置 $R_j^{p'} = R_{j-1}^p + a_{j-1}^p$, 即在摄动力存在下的新位置;
 - 计算这两个位置的目标函数值 $M_j^p = f(R_j^p)$ 和 $M_j^{p'} = f(R_j^{p'})$, 若 $M_j^{p'} > M_j^p$, 则 $R_j^p = R_j^{p'}$.

CFO 算法始终是求搜索空间中的最大值,这一点与其他的随机优化算法有区别.

4 质子的摄动运动方程分析

附加质子 q 质子提供的摄动力,让质子组中的质子运动产生了摄动增量 δx . 正是由于摄动力产生了摄动增量 δx , 此增量可以将使得质子绕过局部最优的陷阱中,继续让质子在全局范围搜索.

本节进一步从理论上证明 δx 的存在. 由于直接讨论质子的坐标摄动比较困难,所以本文从质子坐标相关的量,质子运动轨道根数的角度,来讨论轨道根数的摄动. 最后推导得到一个与质子运动方程 $x = x_0 + \delta x$ 相似的一个基于轨道根数的运动方程,证得 δx 的存在.

介绍轨道根数的定义前,先介绍一个定理.

任一质子运动方程符合下列的偏微分方程^[16,17], N_d 是 CFO 空间维数.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(X_1, X_2, \dots, X_{N_d}); \frac{\partial S}{\partial X_1}, \frac{\partial S}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial X_{N_d}}, t) = 0 \quad (11)$$

其中 X_r ($r = 1, 2, \dots, N_d$) 是质子在 N_d 维空间中的坐标, H 是汉米尔顿函数,式(16)的特征方程是:

$$\dot{X}_r = \frac{\partial H}{\partial Y_r}, \dot{Y}_r = -\frac{\partial H}{\partial X_r} (r = 1, 2, \dots, N_d) \quad (12)$$

其中 \dot{X} 为 X 对时间 t 的一阶导数.

定理 如果函数 $S = S(X_1, X_2, \dots, X_{N_d}, t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_d}) + \alpha$, 是偏微分方程式(11)的任意一个全积分, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_d})$ 为任意相互独立的积分常数,则有关系式:

$\beta_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_r}, Y_r = \frac{\partial S}{\partial X_r} (r = 1, 2, \dots, N_d)$, 所确定的函数:

$$X_r = X_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_d}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_d})$$

$$Y_r = Y_r(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_d}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_d})$$

为特征方程式(16)的解, 其中 β_r 也是相互独立的积分常数.

定理说明 CFO 空间迭代过程中, 对于任意一个质子位置可以通过其 $2 * N_d$ 个积分常数来确定. 当有了摄动力以后, 对于坐标位置的摄动, 可以通过积分常数的摄动来研究.

在天体力学中积分常数, 称为轨道根数, 本文中 CFO 算法中的质子运动和天体力学中质子运动相似, 所以仍然采用天体力学的称谓, 即轨道根数的摄动. 轨道根数的摄动运动方程和坐标摄动运动方程 $x = x_0 + \delta x$ 相类似, 相应的摄动增量为 δc . 本节将研究 CFO 算法中任一质子的 $2 * N_d$ 个轨道根数所产生的摄动. 以下用 c_{pi} 表示任意一个质子第 i 个轨道根数, c_{qi} 表示附加质子的第 i 个轨道根数, 考虑质子组中任一质子其质量为 m , 附加质子质量 m_q , 则在 CFO 算法中任一质子的受摄运动方程有以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_{pi} &= m_q F_i(c_p, c_q, t) \\ \dot{c}_{qi} &= m G_i(c_p, c_q, t) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

函数 F_i, G_i 中的 c_q 和 c_p 表示所有的轨道根数. 对质子摄动方程的研究, 就是要解式(13), $2 * N_d$ 阶常微分方程的问题. 本文将主要研究质子组中任一质子轨道根数, 即 c_{pi} .

将式(13), 按照 m 幂级数展开为:

$$\left. \begin{aligned} c_{pi} &= c_{pi}^{(0,0)} + m c_{pi}^{(1,0)} + m_q c_{pi}^{(0,1)} + m^2 c_{pi}^{(2,0)} \\ &+ m m_q c_{pi}^{(1,1)} + m_q^2 c_{pi}^{(0,2)} + m^3 c_{pi}^{(3,0)} \dots \\ c_{qi} &= c_{qi}^{(0,0)} + m c_{qi}^{(1,0)} + m_q c_{qi}^{(0,1)} + m^2 c_{qi}^{(2,0)} \\ &+ m m_q c_{qi}^{(1,1)} + m_q^2 c_{qi}^{(0,2)} + m^3 c_{qi}^{(3,0)} \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 $c_{pi}^{j,k}$ 为展开式中的系数, 只要求出这些系数, 代入式(14), 就可以得到摄动运动方程的解, 证得轨道根数摄动增量 δc 存在性, 进一步也可以证得坐标摄动增量 δx 存在. 将函数 F_i , 按照二重马克劳林级数展开为:

$$\left. \begin{aligned} F_i &= (F_i)_0 + m \left(\frac{\partial F_i}{\partial m} \right)_0 + m_q \left(\frac{\partial F_i}{\partial m_q} \right)_0 + \\ &\frac{1}{2} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m^2} \right)_0 + 2 m m_q \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m \partial m_q} \right)_0 \right. \\ &\left. + m_q^2 \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m_q^2} \right)_0 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $(X)_0$ 表示在 X 中求过导数后再令 $m = m_q = 0$. 但是 m 和 m_q 隐含在 c_{pi}, c_{qi} 中. 它们已经展开为 m 和 m_q 的幂级数的形式, 即式(14). 因此有

$$\frac{\partial F_i}{\partial m} = \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \frac{\partial c_{ps}}{\partial m} + \frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \frac{\partial c_{qs}}{\partial m} \right)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial m_q} = \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \frac{\partial c_{ps}}{\partial m_q} + \frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \frac{\partial c_{qs}}{\partial m_q} \right)$$

对 m 和 m_q 的高次的微商也可以进行下去.

由上式可得:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial m} \right)_0 = \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(1,0)} \right]$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_q} \right)_0 = \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(0,1)} \right]$$

代入式(14)可得:

$$\begin{aligned} F_i(c_p, c_q, t) &= (F_i)_0 \\ &+ m \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(1,0)} \right] \\ &+ m_q \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \frac{\partial c_{ps}}{\partial m_q} + \frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \frac{\partial c_{qs}}{\partial m_q} \right) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

以式(14)和式(16)代入式(13)两端可得:

$$\left. \begin{aligned} &\dot{c}_{pi}^{(0,0)} + m \dot{c}_{pi}^{(1,0)} + m_q \dot{c}_{pi}^{(0,1)} + m^2 \dot{c}_{pi}^{(2,0)} + \\ &mm_q \dot{c}_{pi}^{(1,1)} + m_q^2 \dot{c}_{pi}^{(0,2)} + m^3 \dot{c}_{pi}^{(3,0)} \dots \\ &= m_q (F_i)_0 + m m_q \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(1,0)} \right] \\ &+ m^2 \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \frac{\partial c_{ps}}{\partial m_q} + \frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \frac{\partial c_{qs}}{\partial m_q} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

比较两端 m 和 m_q 的同次幂系数可得:

$$\dot{c}_{pi}^{(0,0)} = 0, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_{pi}^{(1,0)} &= 0 \\ \dot{c}_{pi}^{(0,1)} &= (F_i)_0 = F_i(c_p^{(0,0)}, c_q^{(0,0)}, t) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_{pi}^{(2,0)} &= 0 \\ \dot{c}_{pi}^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(1,0)} \right] \\ \dot{c}_{pi}^{(0,2)} &= \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(0,1)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

高次项可以一直推导下去, 可得一般项的表达式. 由式(18)得到 $c_{pi}^{(0,0)}$ 应为常数相对于 m_q 等于 0 的情况, 即附加质子质量为 0 为无摄运动. 简记为: $c_{pi}^{(0)}$, 一共有 $2 * N_d$ 个. 在式(19)中 c_{pi} 的展开式中为 m_q 的一次幂系数, 是轨道根数的一阶摄动. 其中除了等于 0 者以外, 还有 i .

$$\dot{c}_{pi}^{(0,1)} = (F_i)_0 = F_i(c_p^{(0)}, c_q^{(0)}, t) \quad (21)$$

其中 (F_i) 是关于轨道根数的已知函数^[16,17], 上式表明, 在 (F_i) 中, 质子的轨道根数都用初值, 应为常数, (F_i) 可以表示为时间的显函数, 可以直接积分求出 $c_{pi}^{(0,1)}$. 因此一阶摄动, 结果为

$$c_{pi} = c_{pi}^{(0)} + m_q c_{pi}^{(0,1)} \quad (22)$$

含有二次幂因子的项,叫做二阶摄动,即在式(20)中的项.除掉等于 0 的因子外,还有:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_{pi}^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{qs}} \right)_0 c_{qs}^{(1,0)} \\ \dot{c}_{pi}^{(1,2)} &= \sum_{s=1}^{2 * N_d} \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_{ps}} \right)_0 c_{ps}^{(0,1)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中 $c_{ps}^{(0,1)}$ 和 $c_{qs}^{(1,0)}$ 已经求得,其余各量为已知,积分得二阶摄动结果为:

$$c_{pi} = c_{pi}^{(0)} + m_q c_{pi}^{(0,1)} + mm_q c_{pi}^{(1,1)} + m_q^2 c_{pi}^{(0,2)} \quad (24)$$

在一阶摄动下,令 $\delta c1 = m_q c_{pi}^{(0,1)}$,二阶摄动,令 $\delta c2 = mm_q c_{pi}^{(1,1)} + m_q^2 c_{pi}^{(0,2)}$ 得到摄动方程

$$c_{pi} = c_{pi}^{(0)} + \delta c1 \quad (25)$$

和

$$c_{pi} = c_{pi}^{(0)} + \delta c2 \quad (26)$$

其中 $c_{pi}^{(0)}$ 为未施加摄动力的轨道根数,也是算法改进前的轨道根数.式(25)和(26)说明改进后的摄动力存在下的轨道根数等于无摄运动轨道根数与摄动增量的和.正是由于摄动增量的存在使得质子的运动在原来基础上产生了偏移,跳过了局部最优的“陷阱”.

式(25)和(26)与摄动运动方程 $x = x_0 + \delta x$ (其中 x_0 是质子在无摄动力存在下坐标, δx 是摄动增量)存在一致性,由定理中的公式及其轨道根数摄动运动方程,可以通过 δc 相应的推导出坐标摄动 δx . 相关的推导过程和坐标摄动的概念,可以参见文献[17,18].

5 实验结果及其性能分析

下面通过几个 benchmark 函数优化问题测试本文算法的性能,并与文献[2,3,4,19]标准粒子群算法(SPSO),种群优化算法(GSO),和标准 CFO 算法(SCFO)的测试结果进行比较.摄动 CFO 简写为 DCFO.最后比较的结果说明了 DCFO 算法在收敛精度和收敛速度方面要优于其他的随机优化算法.

本节通过 matlab 对几种 benchmark 函数进行仿真实验.这几种函数分别为:

$$f_1 = - \sum_{i=1}^{N_d} (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10), -5.12 \leq x_i \leq 5.12$$

$$f_{\max}^* = 0$$

$$f_2 = - \sum_{i=1}^{N_d-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2], -30 \leq x_i \leq 30$$

$$f_{\max}^* = 0$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^{N_d} [x_i \sin(\theta(\sqrt{|x_i|}))], -500 \leq x_i \leq 500$$

$$f_{\max}^*(10) = 4189.8 \quad f_{\max}^*(30) = 12569.5$$

$$f_4 = 20 \exp(-0.2 \sqrt{\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} x_i^2}) + \exp[\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \cos(2\pi x_i)]$$

$$-20 - e, -32 \leq x_i \leq 32$$

$$f_{\max}^* = 0$$

其中 f_3 函数在 10 维和 30 维的最优值为 4189.8 和 12569.5. 仿真实验的结果如表 1 所示.表中部分数据来源于文献[2,3,4,19],参数设置同参考文献. Optimal f 表示理论上的函数全局最大值 CFO 算法是搜索目标函数的全局最大值,这点与其他优化算法有区别,所以在测试函数前都添加了负号. Dim 表示维数.

由于表 1 中其他的算法都是随机优化算法,要求统计意义的性能评估,所以表 1 中是算法运行 100 次的平均值.而 CFO 算法是确定性的算法,同样的初始参数,运行多次都有同样的结果.

表 1 几个 benchmark 函数的算法比较

	DI	SPSO	GSO	SCFO	DCFO
f_1	10	-0.5632	-1.2457	-0.343	-1.34e-3
	30	-20.7863	-1.0179	-3.52e-6	-2.34e-8
f_2	10	-5.5960	-0.3254	-0.1245	-0.113e-2
	30	-37.3852	-49.8359	-2.172e-2	-4.212e-4
f_3	10	2635.613	4181.231	4190.255	4189.7412
	30	6703.612	12569.49	12569.49	12569.501
f_4	10	-2.633e-4	-3.255e-3	-0.5e-5	-0.12e-8
	30	-1.340e-3	-2.655e-5	-1.5e-7	-3.43e-10

由表 1 中还可以看出在相同的维数条件下,标准粒子群算法 SPSO 容易陷入局部最优陷阱,种群优化算法 GSO 算法寻优能力很强比标准粒子群算法有了明显的改善,但是结果不如 SCFO 更接近理论值. DCFO 算法和标准 SCFO 算法相比寻优结果有了一些改进,这说明摄动增量的存在使得质子跳过局部最优值,保持了质子的多样性,让更多的质子在全局空间进行搜索.

下面以 f_3 为例说明优化结果.函数全局最优值是 12,569,在 $x_i = 420.9687, i = 1, \dots, 30$, 函数的最优值分布在决定空间的主对角线上,初始化时质子应该尽可能的远离对角线,以便于质子可以在决定空间中尽可能的搜索.图 1 显示了各种算法在维数为 30,且 CFO 的质子数为 240,PSO 的粒子数为 30 时的收敛轨迹.从图 1 中可以看出 DCFO 算法在迭代 5 次内 fitness 会明显提

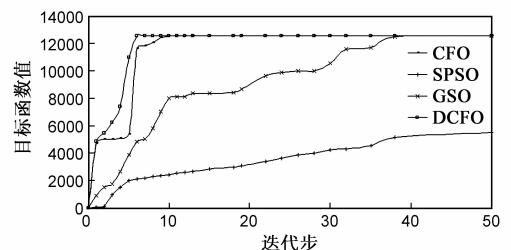


图 1 几种算法对于 f_3 函数测试的收敛曲线

高,大约在迭代 6 次时接近最优值,而在迭代 50 次以后 fitness 增加缓慢,所以在图 1 中只绘出 50 次以内的最优值变化情况.而其他的算法,标准 PSO 算法会陷入局部最小错过全局最优值,种群优化算法 GSO 收敛速度缓慢,标准 CFO 算法收敛速度有所改善,但是比起 DCFO 收敛要慢,这主要是因为标准 CFO 算法在迭代过程中,质子会不断的陷入局部最优的“陷阱”中,接着通过质子间万有引力的作用将部分质子“拉出”,这从一定程度上影响了收敛的速度,而摄动理论的引入,可以帮助改善这种问题.由于摄动增量的存在使得质子直接跳过局部最优,提高了收敛的速度.

衡量质子是否收敛到最优解的参数是质子与最优质子间的平均距离.

$$D_{\text{avg}} = \frac{1}{L \cdot (N_p - 1)} \sum_{p=1}^{N_p} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_d} [x_i^{p,j} - x_i^{p^*,j}]^2} \quad (27)$$

其中 $x_i^{p,j}$ 表示质子 p 在第 j 次迭代中第 i 维的坐标值, p^* 表示 j 次迭代中最优质子.另外

$$L = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_d} (x_i^{\text{max}} - x_i^{\text{min}})^2} \quad (28)$$

这是搜索空间主对角线的长度, $x_i^{\text{min}} \leq x_i \leq x_i^{\text{max}}, i = 1, \dots, N_d, x_i^{\text{min}}$ 和 x_i^{max} 是第 i 维坐标的最大值与最小值.

在 CFO 算法中平均距离 D_{avg} 随迭代次数变化的曲线如图 2 所示,平均距离有波动性,总是不断的上下振动.平均距离不断的上下波动性说明了 CFO 算法迭代中质子陷入局部最优的“陷阱”,然后在质子间万有引力的作用下又不断的从局部最优中被“拉出”,继续在全局范围搜索最优解.对其他几个函数的实验同样可以得到类似的结论.图 3 是 DCFO 算法平均距离曲线,由于摄动增量存在使得质子可以绕过其中一些局部最优值,所以曲线的波动有了相当的改善.避免质子陷入局部最优的“陷阱”,有效的提高了搜索的速度和精度.

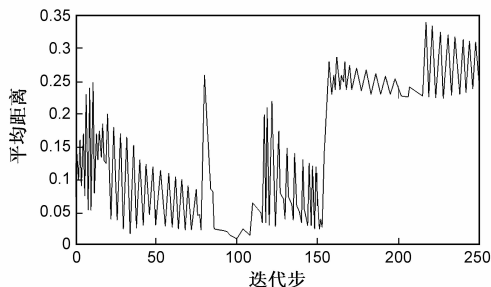


图2 CFO算法30维的 f_3 函数 D_{avg} 曲线

在平均距离公式中有个 L 的因子,这相当于搜索空间主对角线的长度,在迭代的后期各个质子距离越来越远,主对角线的长度越来越小,分母的减小直接导致了最后平均距离值的增加.所以在迭代后期平均距离曲线的升高.

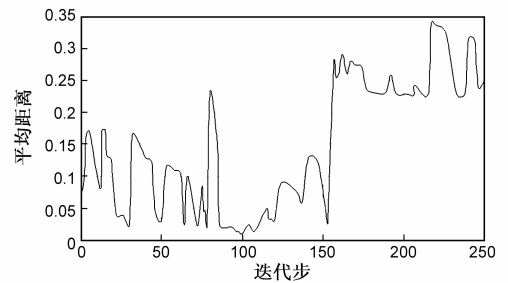


图3 DCFO算法30维的 f_3 函数 D_{avg} 曲线

目前还没有理论来解释 D_{avg} 曲线的这一现象,然而 D_{avg} 的曲线和天体中的 ΔV 曲线很相似,参见文献[20],该文献详细比较了 D_{avg} 和 ΔV 曲线的相似性. CFO 算法通过天体数学分析理论推导得出,所以两者间会有相似.这也说明了,天体力学中的理论可以应用在算法中.

6 结论

本文针对 CFO 算法局部收敛的问题,根据天体力学摄动理论对 CFO 迭代算法进行了改进,利用摄动增量的作用使得质子跳过了一些局部最优解,从一定程度上提高了算法收敛的速度和精度,最后的仿真实验表明基于摄动的 CFO 算法与标准 CFO 算法相比,收敛结果更精确,收敛速度更快.说明利用摄动理论的改进是行之有效的办法.

参考文献

- [1] R A Formato. Central force optimization: A new metaheuristic with applications in applied electromagnetics [J]. Progress in Electromagnetics Research PIER, 2007, 77: 425 - 449.
- [2] S He, et al. Group search optimizer: An optimization algorithm inspired by animal searching behavior [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(5): 973 - 990.
- [3] 吴晓军, 杨战中, 赵明. 均匀搜索粒子群算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(6): 1261 - 1266.
WU Xiao-jun, YANG Zhan-zhong, ZHAO Ming. A uniform searching particle swarm optimization algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(6): 1261 - 1266. (in Chinese)
- [4] 申元霞, 王国胤, 曾传华. 相关性粒子群优化模型 [J]. 软件学报, 2011, 22(4): 695 - 708.
SHEN Yuan-Xia, WANG Guo-Yin, ZENG Chuan-Hua. Correlative particle swarm optimization model [J]. Journal of Software, 2011, 22(4): 695 - 708. (in Chinese)
- [5] 苏兆品, 蒋建国, 梁昌勇, 张国富. 蚁群算法的几乎处处强收敛性分析 [J]. 电子学报, 2009, 37(8): 1646 - 1650.
SU Zhao-pin, JIANG Jian-guo, LIANG Chang-yong, ZHANG Guo-fu. An almost everywhere strong convergence proof for a class of ant colony algorithms [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(8): 1646 - 1650. (in Chinese)

- [6] R F Tavares, et al. An ant colony optimization approach to a permutational flowshop scheduling problem with outsourcing allowed[J]. *Computers & Operations Research*, 2011, 38(9): 1286 – 1293.
- [7] 雷秀娟,等.基于连接强度的 PPI 网络蚁群优化聚类算法[J].*电子学报*,2012,40(4):695 – 702.
LEI Xiu-juan, et al. Joint strength based ant colony optimization clustering algorithm for PPI networks[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(4): 695 – 702. (in Chinese)
- [8] Green II, et al. Training neural networks using central force optimization and particle swarm optimization: insights and comparisons[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(1): 555 – 563.
- [9] Ali Haghghi, Helena, et al. Detection of leakage freshwater and friction factor calibration in drinking networks using central force optimization[J]. *Water Resource Manage*, 2012, 26: 2347 – 2363.
- [10] K R Mahmoud. Central force optimization: Nelder-Mead hybrid algorithm for rectangular microstrip antenna design[J]. *Electromagnetics*, 2011, 31(8): 8866 – 8872.
- [11] M J Xie. Lattice vector quantization applied to speech and audio coding[J]. *ZTE Communications*, 2012, 10(2): 25 – 33.
- [12] S Ragot, B Kovesi, A L Guyader. Noise feedback coding revisited: refurbished legacy codecs and new coding models[J]. *ZTE Communications*, 2012, 10(2): 34 – 44.
- [13] R A Formato. Central force optimization with variable initial probes and adaptive decision space[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217: 8866 – 8872.
- [14] V G Szebehely. Theory of orbits-The restricted problem of three bodies[J]. *Soviet Astronomy*, 1969, 13(2): 364 – 366.
- [15] E L Stiefel, G Scheifele. *Linear and regular Celestial Mechanics*[M]. Berlin: Springer-Verlang, 1971.
- [16] Siegel C J, Moser J K. *Lectures on Celestial Mechanics* Springer[M]. Berlin: Springer-Verlang, 1972.
- [17] 李林森.引力常数随时间变化对双星轨道演变的长期效应[J].*天文学报*,2011,52(3):242 – 250.
LI Lin-sen. Secular effect of evolution of the orbits of binaries induced by the variation of gravitational constant with time [J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2011, 52(3): 242 – 250. (in Chinese)
- [18] 汤靖师,等.近地卫星运动的坐标系附加摄动在拟平均根数法中的处理[J].*天文学报*,2010,51(1):75 – 84.
TANG Jing-shi, et al. The application of Quasi-mean-element-method to LEO under additional perturbation due to change of coordinate system[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2012, 51(1): 75-84. (in Chinese)
- [19] 刘洪波,王秀坤,谭国真.粒子群优化算法的收敛性分析及其混沌改进算法[J].*控制与决策*,2006,21(6):636 – 640.
LIU Hong-bo, WANG Xiu-kun, TAN Guo-zhen. Convergence analysis of particle swarm optimization and its improved algorithm based on chaos[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(6): 636 – 640. (in Chinese)
- [20] Valsecchi, G B, et al. Resonant returns to close approaches: analytical theory [J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2003, 408(3): 1179 – 1196.

作者简介



孟 超 男,1977 年生于江苏镇江,南京航空航天大学计算机科学与技术学院博士研究生.研究方向为智能计算、云计算.

孙知信(通信作者) 男,1964 生于安徽宣城,教授、博士生导师、江苏省云计算专家委员会委员,主要研究领域为网络安全.

E-mail: sunzx@njupt.edu.cn